Tentamen Fouriertheorie, 8 november '04, 9:00-12:00

(1) De functies $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ worden gegeven door
$f_n(x) = 1 + 2(\cos x)^n + 3(\sin x)^n$.
(a) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ bijna overal geldt op $[0, 2\pi]$.
(b) Volgens welke stelling(en) is $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)dx = 2\pi$?

(2) (a) Geef de definitie van een meetbare deelverzameling van $\mathbb{R}^m$.
(b) Wat betekent $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$? (c) Hoe wordt $L^2(\mathbb{R})$ gedefiniëerd?

(3) Bewijs dat de deelverzameling $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\}$ van $\mathbb{R}^2$ Lebesgue maat nul heeft. Welke stelling(en) gebruikt u?

(4) E bestaat uit de rijtes $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ met alle $a_i \in \mathbb{R}$ en met $\lim a_i = 0$. Definiëer $\|a\| = \sup(\{|a_i| \mid i \geq 1\})$. We merken op dat E een vectorruimte is omdat de som van twee rijtjes in E en een scalair veelvoud van een rijtje in E weer in E ligt.
(a) Bewijs dat $\| \ \|$ een norm is.
(b) Bewijs dat E, voorzien van die norm, een Banach ruimte is.

(5) Geef een voorbeeld van een Hilbertruimte.

(6) Formuleer Dirichlets stelling over convergentie van Fourierreeksen.

(7) Bewijs dat de Fourierreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{5+n^3} e^{inx}$ uniform convergeert naar een continue differentieerbare functie $R : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Hint: Bekijk de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in}{5+n^3} e^{inx}$.

(8) $f(x)$ is de 2π-periodieke functie die voldoet aan $f(x) = x$ voor $-\pi < x \leq \pi$. Bereken de Fourierreeks R van f. Voor welke x geldt $R(x) = f(x)$?

(9) Laten reële getallen $a_i < b_i$ voor $i = 1, \ldots, m$ gegeven zijn. Definiëer $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ door $f(x) = 1$ als $x = (x_1, \ldots, x_m)$ voldoet aan $a_i < x_i < b_i$ voor alle i en $f(x) = 0$ voor alle andere $x \in \mathbb{R}^m$. Toon aan dat $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ en bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}(f)$.

(10) $f(x) := xe^{-10x^2}$. Bereken $\|f\|_2$ en de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$.